Probabilités conditionnelles et loi binomiale

Objectifs :

— Savoir construire, lire et exploiter un arbre pondéré
— Savoir calculer une probabilité conditionnelle, et la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers
— Comprendre et savoir exploiter la notion d'indépendance de deux événements

Aperçu historique :

Le traité de CHRISTIAN HUYGENS *"De ratiociniis in ludo aleae" (raisonnements sur les jeux de dés) publié en 1657 est resté le seul ouvrage important de la théorie des probabilités jusqu'au début du xviii° siècle. Puis* PIERRE RÉMOND DE MONTMORT *publie en 1708 "l'Essai sur les Jeux de Hasard" contenant le binôme de Newton, des problèmes de jeux de cartes et le problème des partis. Cependant le terme « probabilité » n'apparait toujours pas dans les écrits, et les problèmes se posent en fonction des « chances » ou des « hasards » des joueurs.*
Les probabilités conditionnelles apparaissent dans "The Doctrine of Chances", ouvrage publié par ABRAHAM DE MOIVRE *en 1718 et contenant également des problèmes combinatoires dont la formule de Stirling, ainsi qu'une approximation de loi normale par une loi binomiale.*

Abraham de Moivre

1. Probabilités conditionnelles

A. Définition et exemples

Exemple 2.1 On a regroupé dans le tableau suivant les pourcentages de filles et de garçons d'un club de sports suivant l'activité choisie (chaque adhérent pratiquant un et un seul sport) :

	Curling	Pétanque	Fléchettes
Filles	12	13	27
Garçons	16	12	20

1. On choisit au hasard un élève de ce club de sports. On note F l'événement « c'est une fille », et C l'événement « l'adhérent pratique le curling ». On a alors : $p(F) = \frac{52}{100} = 0,52$, $p(C) = 0,28$ et $p(F \cap C) = 0,12$.
2. On rencontre au hasard un adhérent de ce club et c'est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle pratique le curling ? Cette probabilité est $p = \frac{12}{52}$ (il y a 12 "curlingueuses parmi les 52 filles). On a donc : $p = \frac{12}{52} = \frac{0,12}{0,52} \simeq 0,23$. On dit que p est une *probabilité conditionnelle*. On note $p_F(C) = \frac{p(F \cap C)}{p(F)}$. On lit : probabilité de C sachant F.

Définition 2.1 Soit A et B deux événements d'un univers Ω. Si $p(B) \neq 0$, on appelle « probabilité de A sachant B » ou « probabilité de A si B » et on note $p_B(A)$ le nombre :

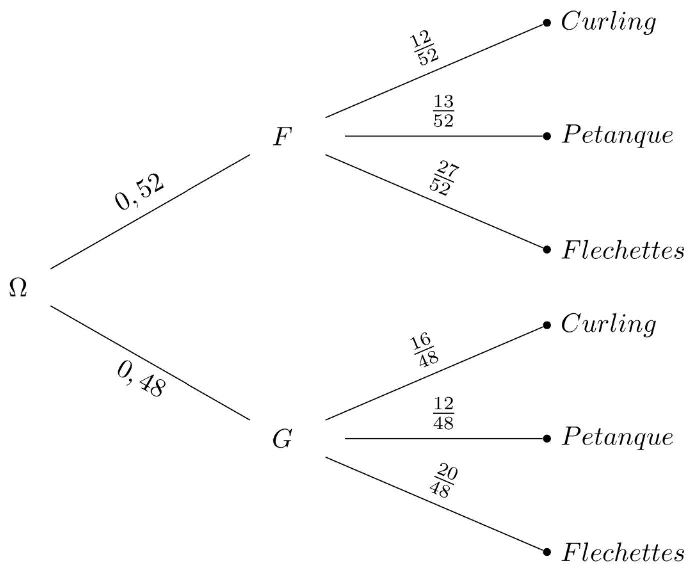
$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Remarque 2.1 La définition est bien cohérente avec la définition d'une probabilité :
- on a $0 \leq p(A \cap B) \leq p(B)$ donc $p_B(A)$ est bien un réel compris de l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- de plus, si $p(B)$ et $p(A)$ sont non nuls, on a alors :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

B. Arbres pondérés

Exemple 2.2 On peut représenter la situation de l'exemple ?? par un arbre pondéré :



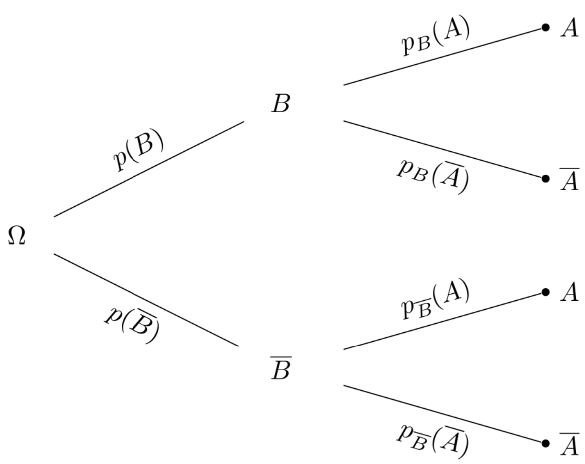
Sur chaque branche de l'arbre, la probabilité se rapporte à « l'univers du nœud précédent » ; ainsi, la probabilité $\frac{12}{52}$ est la probabilité de choisir une « curlingueuse » parmi les filles (l'univers de référence est l'ensemble des filles).

Règles de l'arbre pondéré : on considère l'arbre pondéré tracé ci-après. Les règles indiquées ci-dessous sont toujours vérifiées :
- la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 :

$$p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1;$$

- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des différentes branches qui constituent ce chemin :

$$p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$$



C. Formule des probabilités totales

Définition 2.2 Des événements forment une partition de l'univers Ω si les deux conditions suivantes sont réalisées :
— ils sont deux à deux disjoints ;
— leur réunion forme Ω.
Cela signifie que chaque éventualité de Ω appartient à un et un seul de ces événements.

Exemple 2.3 Dans un jeu de cartes, on tire une carte au hasard. On note P, T, Ca et Co les événements « obtenir un pique, un trèfle, un carreau et un coeur ». Les événements P, T, Ca et Co forment une partition de l'univers.

Propriété 2.1 (Formule des probabilités totales) On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Si B_1, B_2, ..., B_n forment une partition de Ω, alors pour tout événement A de Ω, on a :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots + p(A \cap B_n)$$

Avec l'arbre vu dans les règles de l'arbre pondéré (page ??), l'événement A est la réunion de deux chemins : $p(A)$ est la somme des probabilités de ces chemins :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$

Exemple 2.4 On reprend les données de l'exemple ??. On a alors :

$$p(C) = p(F \cap C) + p(G \cap C) = 0,52 \times \frac{12}{52} + 0,48 \times \frac{16}{48} = 0,12 + 0,16 = 0,28$$

La probabilité qu'un adhérent choisi au hasard pratique le curling est 0,28. Évidemment, il était beaucoup plus simple de le déterminer directement par le tableau, mais en exercice, on peut vous donner l'arbre plutôt que le tableau.

2. Indépendance

A. Événements indépendants

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un d'entre eux n'influence pas les chances que l'autre se réalise. Mathématiquement, on traduit cela par la définition suivante :

Définition 2.3 On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω. Les événements A et B sont dits indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Propriété 2.2 On considère A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω tels que A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$ soient de probabilité non nulle. On a alors :
— les événements A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$
— Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi

Démonstration **ROC : Démonstration à savoir refaire**
— on a : $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, donc $p_B(A) = p(A)$ si et seulement si $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$,
c'est-à-dire $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, c'est-à-dire A et B indépendants.
— on a $B \cap \overline{A} = B \setminus (B \cap A)$ (faire un diagramme), donc : $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(B \cap A)$; on obtient donc :

$$p_{\overline{A}}(B) = \frac{p(B \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{p(B) - p(B \cap A)}{1 - p(A)} = \frac{p(B) - p(B) \times p(A)}{1 - p(A)} = \frac{p(B)(1 - p(A))}{1 - p(A)} = p(B)$$

Exemple 2.5 On choisit au hasard une carte dans un jeu de trente deux cartes. On note T l'événement « c'est un trèfle », et D l'événement « c'est une dame ». $p(T \cap D) = \frac{1}{32}$ (il y a une dame de trèfle dans le jeu). $p(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (il y a huit trèfles dans le jeu). $p(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (il y a quatre dames dans le jeu). On a donc $p(T) \times p(D) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = p(T \cap D)$. Donc les événements D et T sont indépendants. Intuitivement on comprend aisément que si on tire une carte dans le jeu, la chance d'obtenir une dame sachant qu'on a trèfle est la même que celle d'obtenir une dame sans rien savoir sur la carte tirée.
Par contre, en définissant l'événement F : « la carte tirée est une figure », on montre que F et D ne sont pas indépendants. En effet : $p(F \cap D) = p(\texttt{dame de trèfle}) = \frac{1}{32}$; par contre, $p(D) \times p(F) = \frac{1}{8} \times \frac{12}{32} = \frac{3}{64}$.

Remarque 2.2 Pour savoir si deux événements A et B sont indépendants, on a (au moins) deux méthodes :

- on calcule séparément $p(A \cap B)$, puis $p(A) \times p(B)$, et alors A et B sont indépendants si et seulement si les deux calculs précédents sont égaux.
- on calcule séparément $p(A)$ et $p_B(A)$, et alors A et B sont indépendants si et seulement si les deux calculs précédents sont égaux.

B. Expériences enchaînées

Des expériences aléatoires successives sont indépendantes si le résultat de l'une d'elles n'influe pas sur le résultat des autres.

Propriété 2.3 Dans le cas d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'obtenir une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat élémentaire de cette liste.

Exemple 2.6 On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On obtient ainsi un nombre à trois chiffres : le premier lancer nous donne le chiffre des centaines, le deuxième lancer le chiffre des dizaine et le troisième lancer le chiffre des unités. Chacun des lancers de dé est indépendant, donc la probabilité d'obtenir le nombre 421 est : $p(421) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.
Attention : ce n'est pas la probabilité d'obtenir « 421 » en jetant trois dés simultanément car dans ce cas, l'ordre n'a pas d'importance (« 421 », « 214 », « 412 », ... ne forment qu'une seule et même combinaison).

Exemple 2.7 On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note F l'événement « on obtient face ». Ensuite, on tire une boule dans une urne contenant trois boules rouges et quatre boules blanches. On note R l'événement « obtenir une rouge ». Ces deux expériences sont indépendantes. On les réalise successivement. La probabilité d'obtenir l'événement (F, R) est donc : $p(F, R) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.